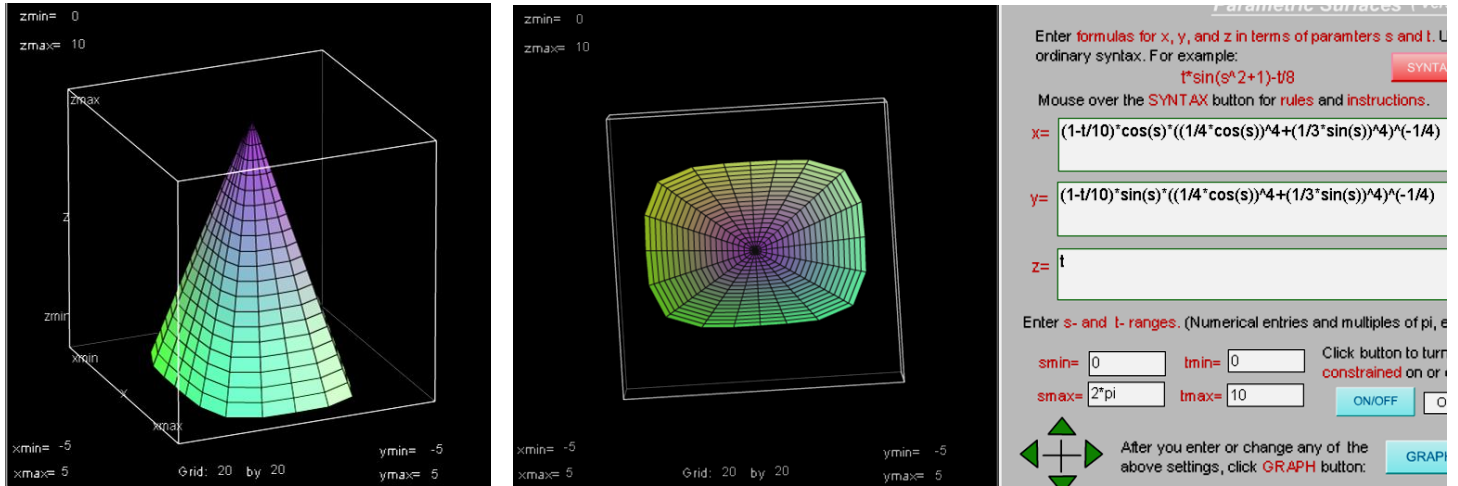


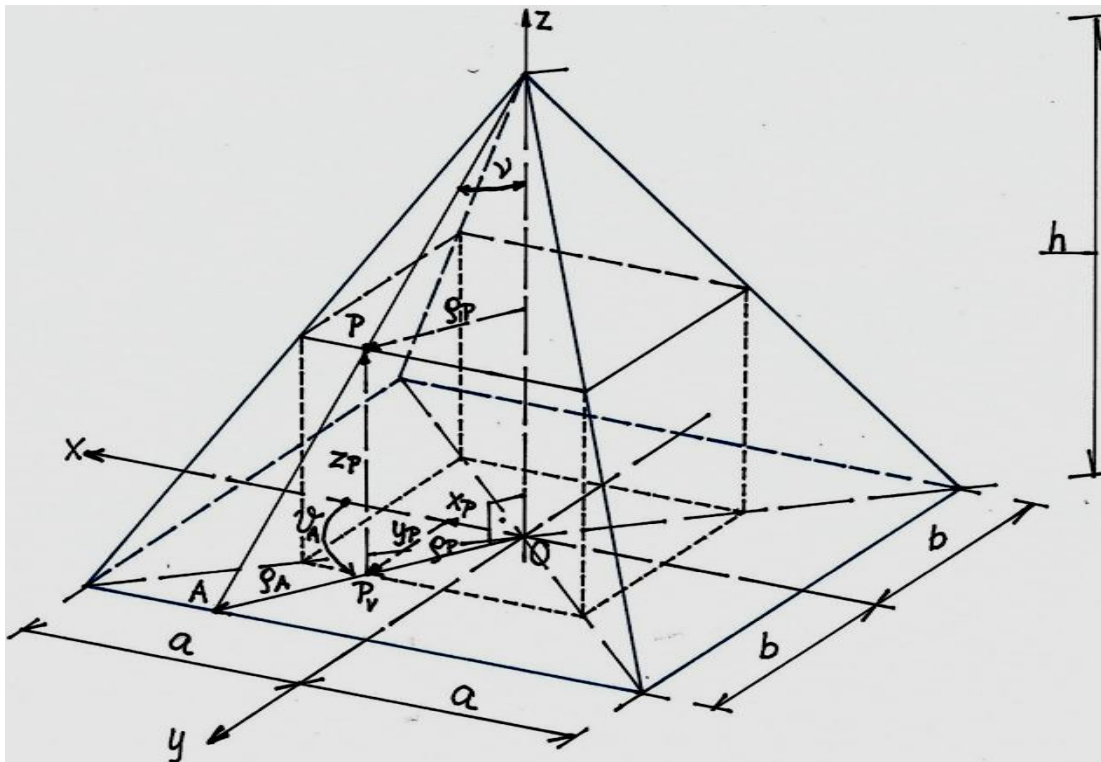
Szuperellipszis vezérgörbájű egyenes kúp ábrázolása

Most ismétlünk egy keveset. Nem lenne jó, ha kijönnénk a gyakorlatból.
A címbeli feladat megoldása az 1. ábrán látható.



1. ábra

A közvetlen teendő: a felület paraméteres egyenletrendszerének felírása.
Ehhez tekintsük a 2. ábrát!



2. ábra

Eszerint a felület egy $\mathbf{P}$ pontjának alapsíkbeli koordinátái:

$$x_P = \rho_P \cdot \cos \vartheta_A, \quad y_P = \rho_P \cdot \sin \vartheta_A. \quad (1)$$

Majd:

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{\rho_A}{h} = \frac{\rho_P}{h-z_P} \rightarrow \rho_P = \frac{h-z_P}{h} \cdot \rho_A, \text{ innen:}$$

$$\rho_P = \left(1 - \frac{z_P}{h}\right) \cdot \rho_A. \quad (2)$$

Most (1) és (2) - vel:

$$x_P = \left(1 - \frac{z_P}{h}\right) \cdot \rho_A \cdot \cos \vartheta_A, \quad y_P = \left(1 - \frac{z_P}{h}\right) \cdot \rho_A \cdot \sin \vartheta_A. \quad (3)$$

A alapsíkidom kontúrjának leírása a szuperellipszissel:

$$\rho_A(\vartheta_A) = \frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{\cos \vartheta_A}{a}\right)^n + \left(\frac{\sin \vartheta_A}{b}\right)^n}}; \quad a > 0, \quad b > 0; \quad n = 2, 4, 6 \dots; \quad 0 \leq \vartheta_A \leq 2 \cdot \pi. \quad (4)$$

Ezután (3) és (4) szerint a felület paraméteres egyenletrendszer, már indexek nélkül:

$$x(z, \vartheta) = \left(1 - \frac{z}{h}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{\cos \vartheta}{a}\right)^n + \left(\frac{\sin \vartheta}{b}\right)^n}} \cdot \cos \vartheta, \quad (5/1)$$

$$y(z, \vartheta) = \left(1 - \frac{z}{h}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{\cos \vartheta}{a}\right)^n + \left(\frac{\sin \vartheta}{b}\right)^n}} \cdot \sin \vartheta, \quad (5/2)$$

$$z(z, \vartheta) = z. \quad (5/3)$$

Az 1. ábrán $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{t}$, $\mathbf{\vartheta} \rightarrow \mathbf{s}$ cserével éltünk, az [1] szerinti adottságokhoz igazodva.

Ugyanitt az ábrázolási adatok:

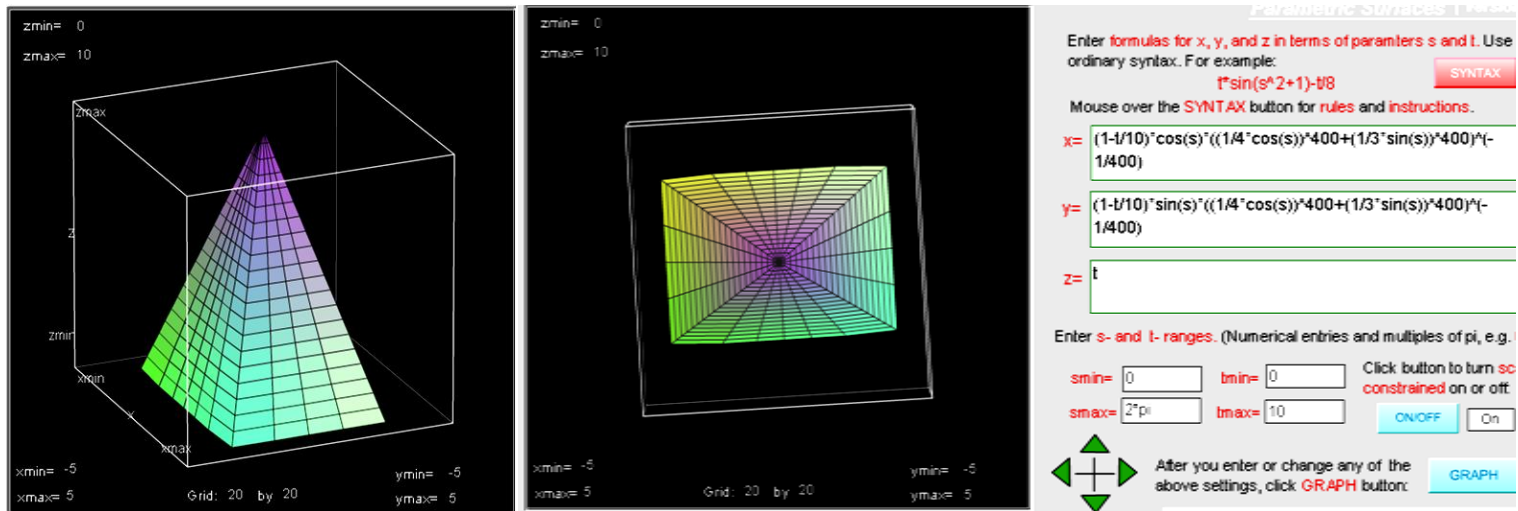
$$a = 4 \text{ (cm)}; \quad b = 3 \text{ (cm)}; \quad h = 10 \text{ (cm)}; \quad n = 4. \quad (A1)$$

Az 1. ábra jobb oldali, közel felülnézeti képén látszik, hogy a kis számú felosztás miatt a szuperellipszis inkább csak sokszög, a kúp pedig inkább csak gúla. Ez azonban nem elvi, hanem csak technikai különbség.

A (4) képlettel már több korábbi írásunkban foglalkoztunk. Ezek után tudjuk, hogy nagy páros n - ekre az ellipszis a téglalaphoz, a kúp pedig a gúlához tart. Egy ilyen esetet mutat a 3. ábra. Itt az ábrázolási adatok:

$$a = 4 \text{ (cm)}; \quad b = 3 \text{ (cm)}; \quad h = 10 \text{ (cm)}; \quad n = 400. \quad (A2)$$

Jól látszik, hogy kialakult a közel téglalap alapú egyenes gúla. Ez azért érdekes, mert egy egyenletrendszerrel lett leírva az egész felület. Van, akinek ezt még szoknia kell.



3. ábra

Megjegyzések:

M1. A (4) képlet páros n kitevőkre könnyen adódik, az alábbiak szerint.

A szuperellipszis kanonikus / implicit egyenlete:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1, \quad n = 2, 4, 6 \dots \quad (\text{e1})$$

A polárkoordinátás írásmód szerint:

$$x(\vartheta) = \rho(\vartheta) \cdot \cos \vartheta, \quad y(\vartheta) = \rho(\vartheta) \cdot \sin \vartheta; \quad (\text{e2})$$

most (e1) és (e2) - vel:

$$\left(\frac{\rho \cdot \cos \vartheta}{a}\right)^n + \left(\frac{\rho \cdot \sin \vartheta}{b}\right)^n = 1; \quad (\text{e3})$$

(e3) - ban elvégezve a kijelölt hatványozást és rendezve:

$$\begin{aligned} \rho^n \cdot \left(\frac{\cos \vartheta}{a}\right)^n + \rho^n \cdot \left(\frac{\sin \vartheta}{b}\right)^n &= 1, \\ \rho^n \cdot \left[\left(\frac{\cos \vartheta}{a}\right)^n + \left(\frac{\sin \vartheta}{b}\right)^n\right] &= 1, \\ \rho^n &= \frac{1}{\left(\frac{\cos \vartheta}{a}\right)^n + \left(\frac{\sin \vartheta}{b}\right)^n}, \\ \rho(\vartheta) &= \frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{\cos \vartheta}{a}\right)^n + \left(\frac{\sin \vartheta}{b}\right)^n}}, \end{aligned} \quad (\text{e4})$$

egyezésben (4) - gyel.

M2. Minthogy a, b az ellipszis fél tengelyhosszai, melyek nagysága pozitív számmal adható meg, így a kiegészítő kikötés:

$$a > 0, b > 0. \quad (\text{e5})$$

M3. Ha n nem páros szám, akkor a szuperellipszis / *Lamé* - görbe – [2] – egyenlete:

$$\left| \frac{x}{a} \right|^n + \left| \frac{y}{b} \right|^n = 1, \quad n > 0. \quad (\text{e6})$$

Javasoljuk, hogy az érdeklődő Olvasó végezze el erre az esetre is $\rho(\mathfrak{g})$ képletének levezetését.

Forrás:

[1] – <http://www.math.uri.edu/~bkaskosz/flashmo/tools/parsur/>

[2] – <https://en.wikipedia.org/wiki/Superellipse>

Összeállította: ***Galgóczi Gyula***
ny. mérnöktanár

Szödliget, 2020. 03. 25.